数理解析研究所講究録
234巻 1975年 102-115

非調和振動円柱の周りの二次流

阪府大 工　　宮城 敏夫

§1. 緒論

静止している非圧縮粘性流体の中で，二次元物体が微小振動をしている場合に，誘起される二次流を考える．

物体の振動方向をx軸に取って，振動速度を

$$U_\infty \cdot f(t') = U_\infty \sum \alpha_n \cos(n\omega t' + \beta_n)$$

とする。今，U_∞, ω^{-1}, L（物体の代表長さ）で Navier-Stokes 方程式を無次元化し，流れの函数 ψ を導入して p を消去すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \epsilon\frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} = \frac{\epsilon^2}{R_s}\Delta^2\psi \qquad (1)$$

となる。ただし，ϵ, R_s は無次元パラメータで

$$\left.\begin{aligned} \epsilon &= U_\infty/(\omega L) = a/L \quad (a\text{は振幅}), \\ R_s &= U_\infty^2/(\omega\nu) = a^2/(\sqrt{\nu/\omega})^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

である．（$\sqrt{\nu/\omega}$ は粘性厚さ）ここで

$$\epsilon^2 \ll R_s \ll 1 \qquad (3)$$

を仮定すれば，（振幅）≪（粘性厚さ）≪（物体長さ）を仮定したこと

と同等である。この仮定の下に，Schlichting[1]は円柱の単振動により外部に誘起される左右対称な二次流の問題を解いた。同じ条件の下で，断面がJoukowski Profile（左右非対称で上下対称）の柱が単振動をしている場合を，玉田・宮城[2]が解いて無限遠で$O(\epsilon)$の一様流が誘起されることを示した。すなわち物体の非対称性のため誘起される二次流が非対称となる。

ここでは，物体は円柱であるが，単振動でなく

$$\partial\psi/\partial y = -(\cos t + \cos 2t) = -Re(e^{it} + e^{2it}) \qquad (4)$$

なる無次元速度をもって運動している場合を取り扱う。これは，x軸の負の方向に速く動いて，正の方向にはゆっくり戻って来るもので，振動が非対称の場合に誘起される二次流に問題の焦点を絞ることにする。

さて，座標軸を物体に固定すれば，境界条件は

$$\left.\begin{array}{ll} \psi = 0, & \text{物体上,} \\ \psi \to y(e^{it} + e^{2it}), & |x| \to \infty \end{array}\right\} \qquad (5)$$

となり，基礎の方程式はこの場合変らない[3]。$\epsilon \ll 1$ より

$$\psi = \psi_0 + \epsilon\psi_1 + \epsilon^2\psi_2 + \cdots \qquad (6)$$

として，基礎式（1）に代入し，最も粗い近似を取れば

$$\partial/\partial t(\Delta\psi_0) = 0 \qquad (7)$$

となり，明らかに物体上の境界条件は充たされない。そこで内部に振動境界層を考えて調整し，解の接続を行う。上記そ

の際に境界層の厚さδについての補正も要するので(6)は

$$\psi=\psi_{00}+\delta\psi_{01}+\delta^2\psi_{02}+\delta^3\psi_{03}+\cdots$$
$$+\epsilon(\psi_{10}+\delta\psi_{11}+\delta^2\psi_{12}+\cdots)$$
$$+\epsilon^2(\psi_{20}+\delta\psi_{21}+\cdots) \qquad (8)$$

と展開されるべきである。ここで，ψについてψ_{20}迄計算することとし，$O(\epsilon^0)$はψ_{02}迄，すなわち

$$|\epsilon^2\psi_{20}|>|\delta^3\psi_{03}|$$

を仮定し，$\epsilon=\delta^p$ $(p>1)$とすれば，$1<p<3/2$ の条件が定まる。(実はこれで普通の Reynolds 数 $R=U_\infty L/\nu$ も決めたことになる) この様にして，ψは

$$\psi=\psi_{00}+\delta\psi_{01}+\delta^2\psi_{02}+\epsilon(\psi_{10}+\delta\psi_{11})+\epsilon^2\psi_{20} \qquad (9)$$

だけを求めることにする。これは境界層内部のψの展開に適当であって，境界層外部では，今問題にしている二次流を支配するパラメータはR_sであることが知られている。[4,5] そこでδでなく，ϵ^2/R_sで書けば，二次流に適する展開は

$$\psi=\psi_{00}+\epsilon(\psi_{01}/R_s^{\frac{1}{2}}+\psi_{10})+\epsilon^2(\psi_{02}/R_s+\psi_{11}/R_s^{\frac{1}{2}}+\psi_{20})。\qquad (10)$$

§2. $O(\epsilon^0)$の解

(10)を(1)に代入して，$O(\epsilon^0)$を取れば，前述の如く

$$\partial/\partial t\,(\Delta\psi_{00})=0 \qquad (11)$$

となるが，今 $\psi_{00}(x,t)=\psi_{op}(x)(e^{it}+e^{2it})$とすれば，$\psi_{op}(x)$は円柱を過ぎる定常なpotential流である。そこで

物体に沿う曲線座標 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ を導入すれば，原点に関する曲座標 (r, θ) とは

$$r = \frac{1}{2} + \tilde{y}, \qquad \theta = -2\tilde{x} \tag{12}$$

の関係があるので

$$\psi_{0p}(x) \sim \left[\psi_{0p}|_{\tilde{y}=0} + \tilde{y}(\partial\psi_{0p}/\partial\tilde{y})_{\tilde{y}=0} + \frac{\tilde{y}^2}{2}(\partial^2\psi_{0p}/\partial\tilde{y}^2)_{\tilde{y}=0} + \cdots\right]$$

を，$\psi_{0p} = (r - 1/4r)\sin\theta$，$\partial\psi_{0p}/\partial\tilde{y}|_{\tilde{y}=0} \equiv V(\tilde{x})$ を用いて，計算すれば

$$\psi_{00}(x, t) \sim V(\tilde{x})(\tilde{y} - \tilde{y}^2 + 2\tilde{y}^3 - \cdots)(e^{it} + e^{2it}) \tag{13}$$

が，物体表面の漸近形となり，境界層外縁の接続条件となる。$V(\tilde{x})$ は potential 流の円柱表面の速度分布で，今の場合実は $2\sin\theta$ に等しい。

一方，境界層方程式を作るために，先づ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ で Navier-Stokes の方程式を書けば，[6]

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Delta}\psi - \frac{\epsilon}{1+k\tilde{y}}\frac{\partial(\psi, \tilde{\Delta}\psi)}{\partial(\tilde{x}, \tilde{y})} = \frac{\epsilon^2}{R_s}\tilde{\Delta}^2\psi. \tag{14}$$

ただし，$\tilde{\Delta} = \dfrac{\partial^2}{\partial\tilde{y}^2} + \dfrac{k}{1+k\tilde{y}}\dfrac{\partial}{\partial\tilde{y}} + \dfrac{1}{(1+k\tilde{y})^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2} - \dfrac{\tilde{y}}{(1+k\tilde{y})^3}\dfrac{dk}{d\tilde{x}}\dfrac{\partial}{\partial\tilde{x}}$

であり，今の場合，$k=2$ である。さて，

$$\psi = \sqrt{2}\,\delta\Psi, \qquad \tilde{y} = \sqrt{2}\,\delta\eta \tag{15}$$

を導入して，境界層近似を施せば

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_\delta\Psi - \epsilon(1 - k\sqrt{2}\,\delta\eta + 2k^2\delta^2\eta^2)\frac{\partial(\Psi, \Delta_\delta\Psi)}{\partial(\tilde{x}, \eta)} = \delta^2\Delta_\delta^2\Psi \tag{16}$$

ただし，
$$\Delta_\delta = \frac{1}{2\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{k}{\sqrt{2}}\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - k^2\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \cdots$$

である。 Ψは境界層内の解であるから，ψに対応して

$$\Psi = \Psi_{00} + \delta\Psi_{01} + \delta^2\Psi_{02} + \epsilon(\Psi_{10} + \delta\Psi_{11}) + \epsilon^2\Psi_{20} \tag{17}$$

なる展開が採用されるべきである。 これを (16) に代入して，最も粗い近似を取れば （$\Psi^{(n)}$はηについてのn回微分とする）

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{00}^{(2)} = \frac{1}{2}\Psi_{00}^{(4)} \tag{18}$$

境界条件
$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{00} = \Psi_{00}^{(1)} = 0, \quad \eta = 0 \\ &\Psi_{00} \sim V(\xi)\,\eta\,(e^{it} + e^{2it}), \quad \eta \to \infty \end{aligned}\right\}$$

となり，解は

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{00} = V(\xi)\sum_{k=1}^{2} k^{-\frac{1}{2}} X_{00,k}(\eta_k)\,e^{ikt} \\ &X_{00,k}(\eta) = \eta - \frac{\bar{\alpha}}{2}(1 - e^{-\alpha\eta}) \\ &\eta_k = k^{\frac{1}{2}}\eta, \qquad \alpha = 1 + i, \qquad \bar{\alpha} = 1 - i \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

となる。この結果，$\psi^{(s)}$と$\psi^{(u)}$で，夫々定常項，非定常項とすれば， $\psi_{00} \equiv \psi_{00}^{(s)} + \psi_{00}^{(u)} = \psi_{00}^{(u)}$， $\Delta\psi_{00}^{(u)} = 0$ ， $\Psi_{00} = \Psi_{00}^{(u)}$ となる。又，Ψ_{00} と ψ_{00} との接続は完全ではなく

$$-V(\xi)(\sqrt{2}\,e^{it} + e^{2it})\frac{\bar{\alpha}}{2}\cdot\delta \tag{20}$$

の差がある。このことは $O(\epsilon^0)$ の解の系列で $O(\delta)$ の補正を要することを示して居り， $\delta\psi_{01}$ の項を考慮しなければならないことを示唆している。実は $\delta^n\psi_{0n}$ の項はすべて，potential流のこの様な補正項を表わしている。

§3. $O(\epsilon)$ の解

外流については，ψ_{20} を決定すべき方程式は $O(\epsilon^4)$ から求まる。いま，(10) を (1) に代入して，$\Delta\psi_{00}=0$ の結果を用いて，形式的に書けば次の様になる。

$$O(\epsilon):\quad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\psi_{01}}{R_s^{\frac{1}{2}}}+\psi_{10}\right)=0, \tag{21}$$

$$O(\epsilon^2):\quad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\psi_{02}}{R_s}+\frac{\psi_{11}}{R_s^{\frac{1}{2}}}+\psi_{20}\right)=\frac{\partial\{\psi_{00},\Delta(\frac{1}{R_s^{\frac{1}{2}}}\psi_{01}+\psi_{10})\}}{\partial(x,y)}, \tag{22}$$

$$O(\epsilon^3):\quad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\psi_{03}}{R_s^{3/2}}+\frac{\psi_{12}}{R_s}+\frac{\psi_{21}}{R_s^{\frac{1}{2}}}+\psi_{30}\right)=\frac{\partial\{\psi_{00},\Delta(\frac{1}{R_s}\psi_{02}+\frac{1}{R_s^{\frac{1}{2}}}\psi_{11}+\psi_{20})\}}{\partial(x,y)}$$
$$+\frac{\partial\{\frac{1}{R_s^{1/2}}\psi_{01}+\psi_{10},\Delta(\frac{1}{R_s^{1/2}}\psi_{01}+\psi_{10})\}}{\partial(x,y)}+\frac{1}{R_s}\Delta^2\left(\frac{\psi_{01}}{R_s^{1/2}}+\psi_{10}\right), \tag{23}$$

$$O(\epsilon^4):\quad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\psi_{04}}{R_s^2}+\frac{\psi_{13}}{R_s^{3/2}}+\frac{\psi_{22}}{R_s}+\frac{\psi_{31}}{R_s^{1/2}}+\psi_{40}\right)$$
$$=\frac{\partial\{\psi_{00},\Delta(\frac{1}{R_s^{3/2}}\psi_{03}+\frac{1}{R_s}\psi_{12}+\frac{1}{R_s^{\frac{1}{2}}}\psi_{21}+\psi_{30})\}}{\partial(x,y)}+\frac{\partial\{\frac{1}{R_s^{1/2}}\psi_{01}+\psi_{10},\Delta(\frac{1}{R_s}\psi_{02}+\frac{1}{R_s^{1/2}}\psi_{11}+\psi_{20})\}}{\partial(x,y)}$$
$$+\frac{\partial\{\frac{1}{R_s}\psi_{02}+\frac{1}{R_s^{1/2}}\psi_{11}+\psi_{20},\Delta(\frac{1}{R_s^{1/2}}\psi_{01}+\psi_{10})\}}{\partial(x,y)}+\frac{1}{R_s}\Delta^2\left(\frac{\psi_{02}}{R_s}+\frac{\psi_{11}}{R_s^{1/2}}+\psi_{20}\right). \tag{24}$$

$O(\epsilon)$ の解は，$R_s\ll 1$ を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_{01}=0 \quad と \quad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_{10}=0 \tag{25}$$

に支配される。ψ_{01} については，(20) が $r=\frac{1}{2}$ に於ける境界条件となるので，$r\to\infty$ で消える解として容易に

$$\psi_{01}=-V(\tilde{x})(\sqrt{2}e^{it}+e^{2it})\frac{\bar{x}}{2}\cdot\frac{1}{2r} \tag{26}$$

と決定できる。 これに対応する内部解 Ψ_{01} の方程式は (16) と (17) より

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{01}^{(2)}-\frac{1}{2}\Psi_{01}^{(4)}=\sqrt{2}\,k\left(\Psi_{00}^{(3)}-\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{00}^{(1)}\right) \tag{27}$$

となる. これを境界条件

$$\left.\begin{aligned}&\Psi_{01}=\Psi_{01}^{(1)}=0\ ,\qquad \eta=0\\&\Psi_{01}\sim\psi_{01}\text{ の }\tilde{y}\doteqdot 0\text{ 附近の解},\qquad \eta\to\infty\end{aligned}\right\}$$

の下で解けば, 次の解が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&\Psi_{01}=2\sqrt{2}\,U(\tilde{x})\sum_{k=1}^{2}k^{-1}X_{01,k}(\eta_k)e^{ikt}\\&X_{01,k}(\eta)=\frac{\bar{\alpha}}{2}\left(\eta-\frac{\bar{\alpha}}{2}+\frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\alpha\eta}\right)-\frac{i}{4}(1-e^{-\alpha\eta})-\frac{1}{2}\eta^2-\frac{\bar{\alpha}}{4}\eta e^{-\alpha\eta}\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

η^2 の項は, ψ_{00} の漸近形の $\tilde{y}^2$ の項と自動的に一致している。 以上は Davidson & Riley[7] の与えている一般論と一致し, Ψ_{01} の具体的な形としては始めて与えられたものである。

(25) の他方の式からは $\Delta\psi_{10}^{(u)}=0$ が得られるだけであるが, 対応する内部解 Ψ_{10} の充すべき方程式は

$$\frac{1}{2}\Psi_{10}^{(4)}-\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{10}^{(2)}=\Psi_{00}^{(1)}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\Psi_{00}^{(2)}-\frac{\partial\Psi_{00}}{\partial\tilde{x}}\Psi_{00}^{(3)} \tag{29}$$

である。 $\Psi_{10}\equiv\Psi_{10}^{(u)}+\Psi_{10}^{(s)}$ と分解すれば, $\Psi_{10}^{(s)}$ は上式の時間微分を零とおいた方程式を充すべきで, 境界条件は

$$\left.\begin{aligned}&\Psi_{10}^{(s)}=\Psi_{10}^{(s)(1)}=0\ ,\qquad \eta=0\\&\Psi_{10}^{(s)(1)}=\text{finite}\ ,\qquad \eta\to\infty\end{aligned}\right\}$$

である。 この解は次の形で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{10}^{(s)} &= V(\tilde{x})\frac{dV}{d\tilde{x}}\sum_{k=1}^{2} k^{-\frac{3}{2}} X_{10,k}^{(s)}(\eta_k) \\ X_{10,k}^{(s)}(\eta) &= \frac{13}{8} - \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{8}e^{-2\eta} + \left(i - \frac{3}{2}\right)e^{-\bar{\alpha}\eta} + \frac{i}{2}\eta e^{-\bar{\alpha}\eta} \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

$k=1$ は当然のこととして，Schlichting[1] の解と一致している。

これに対応する外部解 $\psi_{10}^{(s)}$ は，(23) の $O(\epsilon^3)$ の式で $R_s \ll 1$ を用いて，$1/R_s$ だけ取り出せば，一応次の形になる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_{12} = \frac{\partial(\psi_{00}, \Delta\psi_{02})}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(\psi_{01}, \Delta\psi_{01})}{\partial(x,y)} + \Delta^2\psi_{10}$$

一方，$O(\epsilon^2)$，$1/R_s$ より $\partial/\partial t(\Delta\psi_{02}) = 0$，ie $\Delta\psi_{02} = 0$ および (25) よりの $\Delta\psi_{01} = 0$ を用いると，$\psi_{10}^{(s)}$ については左辺も零となるため

$$\Delta^2\psi_{10}^{(s)} = 0 \qquad (31)$$

なる Stokes の方程式となる。これの内部境界条件は (30) より

$$\Psi_{10}^{(s)(1)} = -\frac{3}{4}V(\tilde{x})\, dV/d\tilde{x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \qquad (32)$$

となるので，$\psi_{10}^{(s)}$ なる Stokes 解は次の様に決まる。

$$\psi_{10}^{(s)} = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta \qquad (33)$$

これは Schlichting の解の 1 に対して $\frac{1}{2}$ が加っただけのものである。一般に e^{it} と e^{int} を重ねると $1/n$ の寄与が増すだけであることが分る。(33) で与えられる解は，今の問題の二次流であるが，明らかに左右対称であり，また無限遠で零となり，単振動の場合と本質的な差異はない。

§4. $O(\epsilon^2)$ の解

Stokes 方程式 (31) を得る前に，$O(\epsilon^2)$, $1/R_s$ より

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_{02} = 0 \tag{34}$$

を得たが，これは ψ_{01} と同様 potential 流の補正であり，ψ_{01} と全く同様にもとめられる．すなわち

$$\psi_{02} = i\,V(\tilde{x})\left(e^{it} + \frac{1}{2}e^{2it}\right)\frac{1}{2r} \tag{35}$$

が解であり，対応する内部解 Ψ_{02} の方程式は

$$\frac{1}{2}\Psi_{02}^{(4)} - \frac{\partial}{\partial t}\Psi_{02}^{(2)} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\partial\Psi_{01}^{(1)}}{\partial t} - \Psi_{01}^{(3)}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\Psi_{00}}{\partial\tilde{x}^2} - 4\eta\frac{\partial\Psi_{00}^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2\Psi_{00}^{(2)}}{\partial\tilde{x}^2} + 2\Psi_{00}^{(2)} + 4\eta\Psi_{00}^{(3)}\right) \tag{36}$$

となる。ただし，曲率 $K = 2$ を用いた。この order になると物体表面の曲率を考慮しなければならない様になる。Ψ_{01} と同様な境界条件の下で解いて，次の解を得る。

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{02} &= 8V(\tilde{x})\sum_{k=1}^{2} k^{-\frac{3}{2}} X_{02,k}(\eta_k)\,e^{ikt}, \\ X_{02,k}(\eta) &= -\frac{i}{4}\left(\eta - \frac{\bar{\alpha}}{2} + \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\alpha\eta}\right) - \frac{5\alpha}{32}\left(1 - e^{-\alpha\eta}\right) + \frac{\eta^3}{2} - \frac{\bar{\alpha}}{2}\eta^2 + \frac{5i}{16}\eta e^{-\alpha\eta} + \frac{3\bar{\alpha}}{16}\eta^2 e^{-\alpha\eta} \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

η^3 の項および η^2 の項は，夫々 ψ_{00} の $\tilde{y}^3$ および ψ_{01} の $\tilde{y}^2$ の項と自動的につながっている。

次に，ψ_{11} は $O(\epsilon^4)$，$1/R_s^{\frac{3}{2}}$ より得られる方程式であるが，前と同様に今迄の結果を採用して，定常項のみ取ると

$$\Delta^2\psi_{11}^{(5)} = 0 \tag{38}$$

となり，やはりStokesの方程式である．　これの内部境界条件は$\Psi_{11}^{(5)}$より与えられ，その方程式と境界条件および解は次の通りである．

$$\frac{1}{2}\Psi_{11}^{(5)(4)} = \left(\Psi_{00}^{(1)}\frac{\partial \Psi_{01}^{(2)}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \tilde{x}}\Psi_{01}^{(3)}\right)^{(5)} + 2\sqrt{2}\left(\Psi_{00}^{(1)}\frac{\partial \Psi_{00}^{(1)}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \tilde{x}}\Psi_{00}^{(2)}\right)^{(5)}$$
$$+ \left(\Psi_{01}^{(1)}\frac{\partial \Psi_{00}^{(2)}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \Psi_{01}}{\partial \tilde{x}}\Psi_{00}^{(2)}\right)^{(5)} - 2\sqrt{2}\eta\left(\Psi_{00}^{(1)}\frac{\partial \Psi_{00}^{(2)}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \tilde{x}}\Psi_{00}^{(3)}\right)^{(5)} - 2\sqrt{2}\Psi_{10}^{(5)(3)} \quad (39)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{11}^{(5)} = \Psi_{11}^{(5)(1)} = 0, && \eta = 0 \\ &\Psi_{11}^{(5)} = \text{finite}, && \eta \to \infty \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{11}^{(5)} = 2\sqrt{2}\,V(\tilde{x})\frac{dV}{d\tilde{x}}\left[k_0 + k_1\eta + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2} k^{-2} X_{11,k}^{(5)}(\eta_k)\right] \\ &k_0 = -\frac{5}{64}(137+32i), \quad k_1 = \frac{1}{32}(4+\sqrt{2})(49-24i) \\ &X_{11,k}^{(5)}(\eta) = \left\{-4i\eta^2 + (18-13i)\eta + 33 + 8i\right\}e^{-\bar{\alpha}\eta} + \left(\eta + \frac{5}{4}\right)e^{-2\eta} \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

これより，$\psi_{11}^{(5)}$の内部境界条件は$\Psi_{11}^{(5)(1)}(\infty)$より求められ，

$$\psi_{11}^{(5)} = -\frac{49}{8}(1+2\sqrt{2})\left(1-\frac{1}{4}\frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta \quad (41)$$

の如く$\psi_{11}^{(5)}$が定まる。　$\psi_{10}^{(5)}$と同様，これは対称な流れであり，無限遠で零となる．

最後に$\psi_{20}^{(5)}$であるが，これは$O(\epsilon^4)$，$1/R_s$の定常項から決まる．　その前に，$O(\epsilon^3)\cdot 1/R_s$から$\Delta\psi_{12}^{(4)} = 0$，また$O(\epsilon^2)\cdot 1/R_s^{\frac{1}{2}}$より$\Delta\psi_{11}^{(4)} = 0$を得るので，結局

$$\Delta^2\psi_{20}^{(5)} = 0 \quad (42)$$

となり，再びStokes方程式である。これに対する$\Psi_{20}^{(5)}$の方程式は

$$\frac{1}{2}\Psi_{20}^{(3)(4)} = \left(\Psi_{00}^{(1)}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\Psi_{10}^{(2)} - \frac{\partial\Psi_{00}}{\partial\tilde{x}}\Psi_{10}^{(3)} + \Psi_{10}^{(1)}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\Psi_{00}^{(2)} - \frac{\partial\Psi_{10}}{\partial\tilde{x}}\Psi_{00}^{(3)}\right)^{(5)} \qquad (43)$$

となる。　しかるに Ψ_{00} は e^{it} と e^{2it} を含み定常項は零であるので，$\Psi_{10}^{(u)}$ を求めておく必要を生ずる。　その方程式は (29) で (u) を取ったもので，基本振動が e^{it} と e^{2it} のため他に e^{3it}, e^{4it} の項が出て来る。　結果は

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_{10}^{(u)} &= V(\hat{x})\frac{dV}{d\tilde{x}}\sum_{k=1}^{4} X_{10,k}^{(u)}(\eta)\,e^{ikt} \\
X_{10,1}^{(u)} &= \frac{1}{48}\Big[(46\sqrt{2}-51)\alpha + (41-21\sqrt{2})\bar{\alpha} + \frac{1}{16}(17\alpha+7\sqrt{2}\bar{\alpha})e^{-\alpha\eta} \\
&\quad -\frac{1}{16}(8\bar{\alpha}+\sqrt{2}\alpha)e^{-\bar{\alpha}\eta} - \frac{1}{8}(2\bar{\alpha}+7\sqrt{2}\alpha)e^{-\sqrt{2}\alpha\eta} - \frac{1}{48}(5\bar{\alpha}+\sqrt{2}\alpha)e^{-(\bar{\alpha}+\sqrt{2}\alpha)\eta} \\
&\quad -\frac{i}{2}\eta e^{-\sqrt{2}\alpha\eta} + \frac{i}{4}\eta e^{-\bar{\alpha}\eta}\Big] \\
X_{10,2}^{(u)}(\eta) &= -\frac{\alpha}{4\sqrt{2}}\left(1-e^{-\sqrt{2}\alpha\eta}\right) + \frac{i}{2}\eta e^{-\alpha\eta}
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

$X_{10,3}^{(u)}$ と $X_{10,4}^{(u)}$ は，$\Psi_{20}^{(5)}$ への寄与がないので省略する。　この様にして (43) の右辺が計算できるので，

$$\Psi_{20}^{(5)} = \Psi_{20}^{(5)(1)} = 0 \;;\; \eta = 0, \quad \Psi_{20}^{(5)(1)} = \text{finite} : \eta\to\infty$$

の境界条件の下に解けば，次の結果を得る。

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_{20}^{(5)} &= V(\hat{x})\left(\frac{dV}{d\tilde{x}}\right)^2 X_{20,a}^{(5)}(\eta) + \{V(\hat{x})\}^2\frac{dV}{d\tilde{x}}X_{20,b}^{(5)}(\eta) \\
X_{20,a}^{(5)}(\eta) &= K_0 + K_1\eta + \text{E.T.} \\
X_{20,b}^{(5)}(\eta) &= K_0' + K_1'\eta + \text{E.T.} \\
K_1 &= \frac{1}{144}(253-189\sqrt{2}) - \frac{1}{432}(1539+593\sqrt{2})i \\
K_1' &= \frac{1}{288}(314-189\sqrt{2}) - \frac{1}{864}(1539-920\sqrt{2})i
\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

ただし，E.T. は $\eta\to\infty$ の時 exponentially に damp する項を示す。

これより，$\psi_{20}^{(s)}$ の内部境界条件は

$$\Psi_{20}^{(s)(1)}(\infty)=V(\chi)\left(\frac{dV}{d\chi}\right)^2\frac{1}{144}(253-189\sqrt{2})+\{V(\chi)\}^2\frac{dV}{d\chi}\frac{1}{288}(314-189\sqrt{2})$$

の如く定まり，Stokes解は $V(\chi)=2\sin\theta$ を用いて，(r,θ) による解法あるいは，函数論的取り扱い[8]によつて，簡単に得られる。結果は次の通りである。

$$\psi_{20}^{(s)}=\left(\frac{21}{8}\sqrt{2}-\frac{109}{18}\right)\left(r-\frac{1}{4}\frac{1}{r}\right)\sin\theta+\left(\frac{205}{72}-\frac{63}{32}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{4}\frac{1}{r^3}\right)\sin 3\theta \qquad (46)$$

この結果は明らかに振動方向に非対称であり，無限遠で零とならない。

§5. 流線図

以上の結果，今考えている範囲内の $\psi^{(s)}$ については

$$\psi^{(s)}=\epsilon\psi_{10}^{(s)}+\epsilon\delta\psi_{11}^{(s)}+\epsilon^2\psi_{20}^{(s)} \qquad (47)$$

なる二次流を得た。$\psi_{20}^{(s)}$ だけが左右非対称であるから，無限遠で一方向に向う一様流になることが期待される。計算によれば

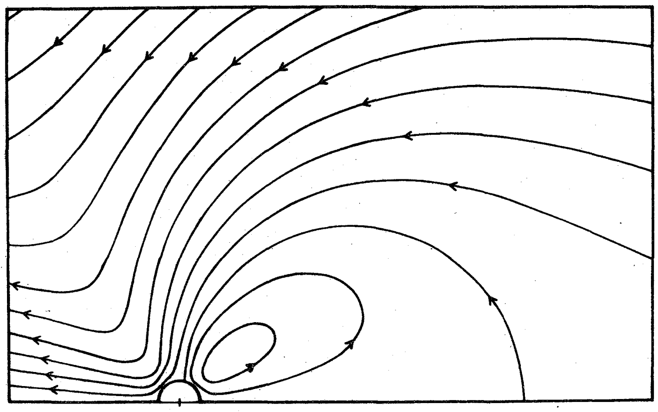
$$(u-iv)_{\infty}^{(s)}\doteqdot-2.34\,\epsilon^2 \qquad (48)$$

であり，x 軸の負の方向に向う一様流が残ることになる。

流線図を画くためには，ϵ や δ なるパラメータを数値的に定めなければならない。$|\epsilon\psi_{10}^{(s)}|>|\epsilon\delta\psi_{11}^{(s)}|$ の条件も考慮して，$\epsilon=1/50$，$\delta=1/25$ (ie $R_s=1/100$) を採用して流線図を画けば，次頁の図の様になる。

§1で述べた様に，物体の断面が振動方向に対称でない場

合には，$O(\epsilon)$ の一様流が二次流として誘起されたが，物体が対称で，振動が非対称の場合には $O(\epsilon^2)$ で非対称性が二次流に現われて来る点が面白い。又その時の $O(\epsilon)$ の二次流 $\psi_{10}^{(5)}$ と $\psi_{11}^{(5)}$ は共に対称的で，無限遠では消え去るものである。



さらに，無限遠の一様流と同じ大きさの，逆向きの流れを重ねれば，無限遠は静止し，x軸の正の方向に円柱が進むことになる。

円柱に働く抵抗は，先の Joukowski Profile の場合と同様，働かない。（これは，その様な場合を取り扱ったことになっていること，或は，この問題の解には Stokeslet がないという事実に対応している。）

この問題は，二次流を支配するパラメータ R_s が1に比べて極めて小さい場合の解析であるが，Stuart[8] や Davidson & Riley[7] などは $R_s \gg 1$ の問題を取り扱っている。

参考文献

1) H. Schlichting : Phys. Zeits. 33 (1932) 327.

2) K. Tamada and T. Miyagi : J. Phys. Soc. Japan 37 (1974) 249.

3) M. J. Lighthill : Proc. Roy. Soc. A 224 (1954) 1.

4) J. T. Stuart : Laminar Boundary Layers, ed. L. Rosenhead (Oxford Univ. Press, 1963) p.381.

5) N. Riley : J. Inst. Maths. Applics. 3 (1967) 419.

6) S. Goldstein : Modern Developments in Fluid Dynamics. (Oxford) Vol. 1. p. 114.

7) B. J. Davidson & N. Riley : J. Fluid Mech. 53 (1972) 287.

8) J. T. Stuart : J. Fluid Mech. 24 (1966) 673.